Bestimmung der Gleichgewichtslage
eines
sehr dünnen cylindrischen homogenen Stabes,
welcher
in seinem Schwerpunkte befestigt ist und von der sphäroidischen Erde angegriffen wird, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um ihre Axe dreht.

Inaugural-Dissertation,
der
philosophischen Facultät der Universität Rostock
vorgelegt
von

Nic. Eus. Zdralek,
Dr. phil.

Rostock.
Universitäts-Buchdruckerei von Adler's Erben.
1870.

Die Attraction der Ellipsoide war seit Newton's Zeiten vielfach Gegenstand der Untersuchung für die bedeutendsten Mathematiker, welche die betreffende Theorie auf sehr verschiedenen Wegen zu der Vollkommenheit führten, in welcher sie jetzt vor uns liegt. Es kann nicht in der Absicht liegen, die Ableitung der Formeln, welche die Componenten dieser Anziehung gaben, hier zu wiederholen, um so weniger, als sich dieselbe in jedem Lehrbuche der analytischen Mechanik findet. Es wird vielmehr gestattet sein, hier von den bekannten Resultaten Gebrauch zu machen.

Die Componenten der Anziehung treten in Form von Integralen auf, welche sich nur für den Fall von Rotationsellipsoiden in endlicher Form berechnen lassen. Auf diesen Fall beschränken wir uns, indem wir voraussetzen, daß der anziehende Körper ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit der großen Axe B und der kleinen Axe A sei, also die Gleichung hat

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2 + Z^2}{B^2} = 1$$

Der angezogene Punkt habe die Coordinaten x y z.

Führt man dann die Bezeichnung

$$\frac{B^2 - A^2}{A^2} = \lambda^2$$

ein und bestimmt eine Größe v dergestallt, daß sie der Gleichung genügt

$$v^2 x^2 + \frac{v^2 (y^2 + z^2)}{1 + \lambda^2 v^2} = A^2,$$

welche bekanntlich immer nur e i n e positive Lösung hat, welche zu wählen ist, so sind die Componenten X Y Z der Anziehung des Ellipsoids auf den Punkt x y z durch folgende Formeln gegeben,

*

in welchen V das Potential des Rotationsellipsoids auf den Punkt x y z und μ die Anziehung bedeutet, welche die Einheit der Masse auf einen in der Einheit der Entfernung befindlichen Punkt ausübt:

$$X = \frac{dV}{dx} = -\frac{4\pi\mu\varrho(1+\lambda^2)}{\lambda^3}\left(\lambda v - \operatorname{artg}\lambda\nu\right)x$$

$$Y = \frac{dV}{dy} = -\frac{2\pi\mu\varrho(1+\lambda^2)}{\lambda^3}\left(\operatorname{arctg}\lambda v - \frac{\lambda v}{1+\lambda^2 v^2}\right)y$$

$$Z = \frac{dV}{dz} = -\frac{2\pi\mu\varrho(1+\lambda^2)}{\lambda^3}\left(\operatorname{artg}\lambda v - \frac{\lambda v}{1+\lambda v^2}\right)z$$

Wir setzen jetzt weiter voraus, daß das Ellipsoid mit der gleichförmigen Geschwindigkeit w um die X-Axe rotire und stellen uns die Aufgabe, die Gleichgewichtslage eines sehr dünnen cylindrischen Stabes zu finden, der in seinem Schwerpunkte x_0 y_0 z_0 unterstützt ist.

Setzen wir:

$$W = V + \frac{w^2}{2}(y^2 + z^2),$$

so sind die Componenten der Anziehung auf irgend einen Punkt des Stabes

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{dW}{dy} = \frac{dV}{dy} + w^2 y$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dV}{dz} + w^2 z$$

Unter Einführung dieser Bezeichnung ist die Gleichgewichtslage durch folgende 3 Bedingungen bestimmt:

$$0 = \int dm \left\{(y - y_0)\frac{dW}{dz} - (z - z_0)\frac{dW}{dy}\right\}$$

$$0 = \int dm \left\{(z - z_0)\frac{dW}{dx} - (x - x_0)\frac{dW}{dz}\right\}$$

$$0 = \int dm \left\{(x - x_0)\frac{dW}{dy} - (y - y_0)\frac{dW}{dx}\right\}$$

in welchen Formeln die Integrale über den ganzen Stab auszudehnen sind.

Die Gleichungen des Stabes seien

$$x = x_0 + r\alpha$$
$$y = y_0 + r\beta$$
$$z = z_0 + r\gamma,$$

worin α, β, γ die Cosinus der Winkel bedeuten, welche die Richtung des Stabes mit den Axen bildet, so daß

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Die Länge des Stabes sei $2R$, so daß man die Coordinaten der Endpunkte desselben erhält, wenn man in die eben niedergeschriebenen Formeln $+R$ und $-R$ statt r einsetzt.

Dann lassen sich die drei Bedingungsgleichungen schreiben:

$$0 = \int_{-R}^{+R} r\varepsilon dr \left\{ \beta \frac{dW}{dz} - \gamma \frac{dW}{dy} \right\}$$

$$0 = \int_{-R}^{+R} \varepsilon r dr \left\{ \gamma \frac{dW}{dx} - \alpha \frac{dW}{dz} \right\}$$

$$0 = \int_{-R}^{+R} \varepsilon r dr \left\{ \alpha \frac{dW}{dy} - \beta \frac{dW}{dx} \right\},$$

worin ε die Dichtigkeit des Stabes bedeutet.

Wir machen jetzt die beschränkende Voraussetzung, daß die Länge des Stabes im Vergleich zum Erdhalbmesser so klein ist, daß die höheren Potenzen von r vernachlässigt werden können. Die Folge davon ist, daß man die Entwickelungen von $\frac{dW}{dx}, \frac{dW}{dy}, \frac{dW}{dz}$ nach Potenzen von r nach dem ersten Gliede abbrechen kann.

Nennen wir die speciellen Werthe, welche $\frac{dW}{dx}, \frac{dW}{dy}, \frac{dW}{dz}, \frac{d^2W}{dx^2}, \frac{d^2W}{dy^2}, \frac{d^2W}{dz^2}, \frac{d^2W}{dy\,dz}, \frac{d^2W}{dz\,dx}, \frac{d^2W}{dx\,dy}$ annehmen, wenn man statt der Variabeln xyz die Coordinaten des Schwerpunktes $x_0\, y_0\, z_0$ substituirt, der Reihe nach

$W_1\ W_2\ W_3\ W_{11}\ W_{22}\ W_{33}\ W_{23} = W_{32}\ W_{31} = W_{13}\ W_{12} = W_{21}$,

so haben wir nach dem Taylor'schen Satze

$$\frac{dW}{dx} = W_1 + r\,(W_{11}\,\alpha + W_{12}\,\beta + W_{13}\,\gamma)$$

$$\frac{dW}{dy} = W_2 + r\,(W_{21}\,\alpha + W_{22}\,\beta + W_{23}\,\gamma)$$

$$\frac{dW}{dz} = W_3 + r\,(W_{31}\,\alpha + W_{32}\,\beta + W_{33}\,\gamma)$$

Beachtet man nun, daß $\int_{-R}^{+R} r\,dr = 0$, $\int_{-R}^{+R} r^2\,dr$ aber von Null verschieden ist, so gehen die obigen drei Bedingungsgleichungen über in

$$0 = \beta\,(W_{31}\,\alpha + W_{32}\,\beta + W_{33}\,\gamma) - \gamma\,(W_{21}\,\alpha + W_{22}\,\beta + W_{23}\,\gamma)$$

$$0 = \gamma\,(W_{11}\,\alpha + W_{12}\,\beta + W_{13}\,\gamma) - \alpha\,(W_{31}\,\alpha + W_{32}\,\beta + W_{33}\,\gamma)$$

$$0 = \alpha\,(W_{21}\,\alpha + W_{22}\,\beta + W_{23}\,\gamma) - \beta\,(W_{11}\,\alpha + W_{12}\,\beta + W_{13}\,\gamma).$$

Diese so erhaltenen drei Gleichungen sind nicht unabhängig von einander; denn multiplicirt man die erste α, die zweite mit β, die dritte mit γ — welche Größen nicht gleichzeitig verschwinden können — und summirt die Gleichungen, so verschwindet die Summe identisch. Diese drei Gleichungen repräsentiren sonach nur zwei, aus welchen mit Hülfe der Relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

die Unbekannten α, β, γ zu finden sind.

Um die Größen $W_{\varkappa\lambda}$ zu finden, bilden wir zunächst die partiellen Ableitungen von v und erhalten

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v^3\,x\,(1 + \lambda^2\,v^2)}{A^2 + \lambda^2\,v^4\,x^2}$$

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{v^3\,y}{A^2 + \lambda^2\,v^4\,y^2}$$

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{v^3\,z}{A^2 + \lambda^2\,v^4\,z^2}$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke erhalten wir unter Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$K = -\frac{2\pi\mu\varrho(1+\lambda^2)}{\lambda^3}$$

$$\frac{d^2 W}{d x^2} = 2 K (\lambda v - \operatorname{artg} \lambda v) - \frac{2 K \lambda^3 v^5 x^2}{A^2 + \lambda^2 v^4 x^2}$$

$$\frac{d^2 W}{d y^2} = w^2 + K \left(\operatorname{artg} \lambda v - \frac{\lambda v}{1+\lambda^2 v^2}\right) - \\ - \frac{2 K \lambda^3 v^5 y^2}{(1+\lambda^2 v^2)(A^2 + \lambda^2 v^4 x^2)}$$

$$\frac{d^2 W}{d z^2} = w^2 + K \left(\operatorname{arctg} \lambda v - \frac{\lambda v}{1+\lambda^2 v^2}\right) \\ - \frac{2 K \lambda^3 v^5 z^2}{(1+\lambda^2 v^2)(A^2 + \lambda^2 v^4 x^2)}$$

$$\frac{d^2 W}{dy dz} = - \frac{2 K \lambda^3 v^5 y z}{(1+\lambda^2 v^2)(A^2 + \lambda^2 v^4 x^2)}$$

$$\frac{d^2 W}{dz dx} = - \frac{2 K \lambda^3 v^5 z x}{(1+\lambda^2 v^2)(A^2 + \lambda^2 v^4 x^2)}$$

$$\frac{d^2 W}{dx dy} = - \frac{2 K \lambda^3 v^5 x y}{(1+\lambda^2 v^2)(A^2 + \lambda^2 v^4 x^2)}$$

Bezeichnet man mit v_0 den Werth von v, welchen dieses annimmt, wenn für die laufenden Coordinaten x y z die Coordinaten x_0 y_0 z_0 des Schwerpunktes des Stabes eingesetzt werden und setzt zur Abkürzung

$$M_0 = \frac{2 K \lambda^3 v_0^5}{A^2 + \lambda^2 v_0^4 x_0^2},$$

so hat man:

$$W_{11} = 2 K (\lambda v_0 - \operatorname{arctg} \lambda v_0) - M_0 x_0^2$$

$$W_{22} = w^2 + K \left(\operatorname{arctg} \lambda v_0 - \frac{\lambda v^0}{1+\lambda^2 v_0^2}\right) - \frac{M_0 y_0^2}{(1+\lambda^2 v_0^2)^2}$$

$$W_{33} = w^2 + K \left(\operatorname{arctg} \lambda v_0 - \frac{\lambda v^0}{1+\lambda^2 v_0^2}\right) - \frac{M_0 z_0^2}{(1+\lambda^2 v_0^2)^2}$$

$$W_{23} = W_{32} = - \frac{M_0 y_0 z_0}{(1+\lambda^2 v_0^2)^2}$$

$$W_{31} = W_{13} = - \frac{M_0 z_0 x_0}{1+\lambda^2 v_0^2}$$

$$W_{12} = W_{21} = -\frac{M_0 x_0 y_0}{1 + \lambda^2 v_0^2}$$

$$W_{11} \alpha + W_{12} \beta + W_{13} \gamma = 2 K \alpha (\lambda v_0 - \operatorname{artg} \lambda v_0) - M_0 x_0 \left(x_0 \alpha + \frac{y_0 \beta + z_0 \gamma}{1 + \lambda^2 v_0^2} \right)$$

$$W_{21} \alpha + W_{22} \beta + W_{23} \gamma = w^2 \beta + K \beta \left(\operatorname{artg} \lambda v_0 - \frac{\lambda v_0}{1 + \lambda^2 v_0^2} \right) - \frac{M_0 y_0}{1 + \lambda^2 v_0^2} \left(x_0 \alpha + \frac{y_0 \beta + z_0 \gamma}{1 + \lambda^2 v_0^2} \right)$$

$$W_{31} \alpha + W_{32} \beta + W_{33} \gamma = w^2 \gamma + K \gamma \left(\operatorname{arctg} \lambda v_0 - \frac{\lambda v_0}{1 + \lambda^2 v_0^2} \right) - \frac{M_0 z_0}{1 + \lambda^2 v_0^2} \left(x_0 \alpha + \frac{y_0 \beta + z_0 \gamma}{1 + \lambda^2 v_0^2} \right)$$

Zunächst geht die Bedingung $\gamma (W_{21} \alpha + W_{22} \beta + W_{23} \gamma) - \beta (W_{31} \alpha + W_{32} \beta + W_{33} \gamma) = 0$ über in $(y_0 \gamma - z_0 \beta) \left(x_0 \alpha + \frac{y_0 \beta + z_0 \gamma}{1 + \lambda^2 v_0^2} \right) = 0$

Das Product verschwindet nur, wenn einer der beiden Factoren verschwindet. Nehmen wir deshalb zunächst an, es sei

$$\text{I. } x_0 \alpha + \frac{y_0 \beta + z_0 \gamma}{1 + \lambda^2 v_0^2} = 0,$$

so liefert die Gleichung

$$\alpha (W_{21} \alpha + W_{22} \beta + W_{23} \gamma) - \beta (W_{11} \alpha + W_{12} \beta + W_{13} \gamma) = 0$$

die Bedingung

$$w^2 \alpha \beta - K \alpha \beta \left(3 \operatorname{arctg} \lambda v_0 - \frac{\lambda v_0}{1 + \lambda^2 v_0^2} - 2 \lambda v_0 \right) = 0$$

Die dritte Bedingung wird ebenso lauten, nur wird β mit γ zu vertauschen sein. Man sieht, daß im Allgemeinen der zweiten und dritten Gleichung nur durch den Werth

$$\alpha = 0$$

genügt werden kann.

Die Gleichungen

$$x_0 \alpha + \frac{y_0 \beta + z_0 \gamma}{1 + \lambda^2 v_0^0} = 0$$

$$\alpha = 0$$

geben mithin eine Gleichgewichtslage des Stabes. Dieselben lassen sich schreiben

$$x x_0 + \frac{y y_0 + z z_0}{1 + \lambda^2 v_0^2} = 0$$

$$x = x_1$$

Die erste dieser Gleichungen ist die Gleichung der im Punkte $x_0\, y_0\, z_0$ an eine durch ihn gehende zur gegebenen confocalen Fläche gelegte Tangentialebene; die zweite Gleichung drückt aus, daß in dieser Tangentialebene diejenige Richtung die gesuchte Gleichgewichtslage ist, welche die Rotationsaxe senkrecht kreuzt. Es darf nicht unerwähnt gelassen werden, daß die Gleichung

$$\alpha = 0$$

nicht erfordert wird, wenn zwischen den constanten Größen die Relation besteht:

$$w^2 + K \left(3 \operatorname{arctg} \lambda v_0 - \frac{\lambda v_0}{1 + \lambda^2 v_0^2} - 2 \lambda v_0\right) = 0$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist der Stab in jeder Richtung der genannten Tangentialebene im Gleichgewicht.

Wir wenden uns nunmehr zu dem zweiten Falle, nämlich

II. $y_0 \lambda - z_0 \beta = 0$ oder $y z_0 - z y_0 = 2 y_0 z_0$,

welches ausdrückt, daß die Projection der Gleichgewichtslage auf die Aequatorialebene in die Projection der Normale des durch den Punkt $x_0\, y_0\, z_0$ gehenden confocalen Ellipsoids fällt. Als zweite Gleichung ergiebt sich:

$$w^2 \alpha \beta + K \alpha \beta \left(3 \operatorname{arctg} \lambda v_0 - \frac{\lambda v^2}{1 + \lambda^2 v_0^2} - 2 \lambda v_0\right)$$

$$+ M_0 \left(\beta x_0 - \frac{\lambda y_0}{1 + \lambda^2 v_0^2}\right) \left(x_0 \alpha + \frac{y_0 \beta + z_0 \gamma}{1 + \lambda^2 v_0^2}\right)$$

welche ausdrückt, daß die Gleichgewichtslage auf einer gewissen Fläche zweiten Grades liegt. Ist auch hier wiederum die obige Bedingungsgleichung

$$w^2 + 3 \operatorname{arctg} \lambda v_0 - \frac{\lambda v_0}{1 + \lambda^2 v_0^2} - \lambda v_0 = 0$$

erfüllt, so nimmt die zweite Bedingung die Form an:

$$\frac{y_0 \alpha}{1 + \lambda^2 v_0^2} - x_0 \beta = 0,$$

d. h. die Gleichgewichtslage fällt in die Normale.

Dasselbe Problem läßt noch eine andere Lösung zu. Es ist nicht meine Absicht, dieselbe jetzt folgen zu lassen, sondern ich will mich nur damit begnügen, ihren Gang anzugeben.

Die z-Axe sei Rotationsaxe, v das Potential des Erdellipsoids, w die Winkelgeschwindigkeit.

Auf das Theilchen dm des Stabes wirken dann die Kräfte

$$X dm = dm \left(\frac{dV}{dx} + w^2 x \right)$$

$$Y dm = dm \left(\frac{dV}{dy} + w^2 y \right)$$

$$Z dm = dm \frac{dV}{dz}$$

Der Schwerpunkt, dessen Coordinaten wieder $x_0\ y_0\ z_0$ sein mögen, ist fest, folglich findet Gleichgewicht statt, wenn die Summe der Momente in Bezug auf jede durch $(x_0\ y_0\ z_0)$ gehende Grade verschwindet, d. h. wenn

$$0 = \int dm \Big((y - y_0) Z - (z - z_0) Y \Big)$$

$$0 = \int dm \Big((z - z_0) X - (x - x_0) Z \Big)$$

$$0 = \int dm \Big((x - x_0) Y - (y - y_0) X \Big)$$

— über den ganzen Stab integrirt —.

Es sei ferner

$$W = V + \frac{w^2}{2} (x^2 + y^2),$$

so ist

$$X = \frac{dW}{dx}\ Y = \frac{dW}{dy}\ Z = \frac{dW}{dz}$$

Multiplicirt man nun die drei Bedingungsgleichungen mit

den willkürlichen Constanten g h k und addirt sie, so erhält man die eine Bedingung

$$0 = \int dm \left\{ \begin{matrix} g\, x - x_0 \dfrac{dW}{dx} \\ h\, y - y_0 \dfrac{dW}{dy} \\ k\, z - z_0 \dfrac{dW}{dz} \end{matrix} \right\}$$

Die Coordinaten des Massentheilchens dm auf die drei Hauptträgheitsaxen des Stabes bezogen, seien a b c, dann ist

$$x - x_0 = a\alpha + b\alpha' + c\alpha'' = \xi$$
$$y - y_0 = a\beta + b\beta' + c\beta'' = \eta$$
$$z - z_0 = a\gamma + a\gamma' + a\gamma'' = \zeta$$
$$\int a\,dm = 0 \quad \int b\,dm = 0 \quad \int c\,dm = 0$$
$$\int bc\,dm = 0 \quad \int ca\,dm = 0 \quad \int ab\,dm = 0$$

Es sei noch

$$\int a^2 dm = A$$
$$\int b^2 dm = B$$
$$\int c^2 dm = C$$

Die Dimensionen des Stabes seien im Vergleich zu dem als Maßeinheit genommenen Erdhalbmesser so klein, daß $\xi\, \eta\, \zeta$ als Größen erster Ordnung betrachtet, also die einzelnen Producte und Potenzen derselben vernachlässigt werden können. Dann kann man schreiben:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dW}{dx_0} + \frac{d^2W}{dx_0^2}(x - x_0) + \frac{dW}{dx_0\, dy_0}(y - y_0) + \frac{d^2W}{dx_0\, dz_0}(z - z_0)$$

$$\frac{dW}{dy} = \frac{dW}{dy_0} + \frac{d^2W}{dy_0\, dx_0}(x - x_0) + \frac{d^2W}{dy_0\, dy_0}(y - y_0) + \frac{d^2W}{dy_0\, dz_0}(z - z_0)$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dz_0} + \frac{d^2W}{dz_0\,dx_0}(x-x_0) + \frac{d^2W}{dz_0\,dy_0}(y-y_0)$$
$$+ \frac{d^2W}{dz_0\,dz_0}(z-z_0)$$

Die Glieder $\frac{dW}{dx_0}$ $\frac{dW}{dy_0}$ $\frac{dW}{dz_0}$ sind für alle Punkte des Stabes dieselben, haben also auf die Gleichgewichtslage keinen Einfluß. Setzen wir also

$$2U = \frac{d^2W}{dx_0\,dx_0}\xi^2 + \frac{d^2W}{dy_0\,dy_0}\eta^2 + \frac{d^2W}{dz_0\,dz_0}\zeta^2$$
$$+ \frac{2d^2W}{dy_0\,dz_0}\eta\zeta + \frac{2d^2W}{dy_0\,dx_0}\zeta\xi + \frac{2d^2W}{dx_0\,dy_0}\eta\zeta$$

so wird die Bedingungsgleichung

$$\int dm \left\{ \begin{matrix} g\,\xi\,\frac{dU}{d\xi} \\ h\,\eta\,\frac{dU}{d\eta} \\ k\,\zeta\,\frac{dU}{d\zeta} \end{matrix} \right\} = 0$$

Durch Einsetzen von a b c für $\xi\,\eta\,\zeta$ gehe 2 U über in

$$2U = f_{11}\,a^2 + f_{22}\,b^2 + f_{33}\,c^2 + 2f_{23}\,bc + 2f_{31}\,ca$$
$$+ 2f_{12}\,ab$$

dann wird

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{dU}{da}\cdot\frac{da}{d\xi} + \frac{dU}{db}\cdot\frac{db}{d\xi} + \frac{dU}{dc}\cdot\frac{dc}{d\xi}$$
$$\frac{dU}{d\eta} = \frac{dU}{da}\cdot\frac{da}{d\eta} + \frac{dU}{db}\cdot\frac{db}{d\eta} + \frac{dU}{dc}\cdot\frac{dc}{d\eta}$$
$$\frac{dU}{d\zeta} = \frac{dU}{da}\cdot\frac{da}{d\zeta} + \frac{dU}{db}\cdot\frac{db}{d\zeta} + \frac{dU}{dc}\cdot\frac{dc}{d\zeta}$$

oder:

$$\frac{dU}{d\xi} = \alpha\frac{dU}{da} + \beta\frac{dU}{db} + \gamma\frac{dU}{dc}$$
$$\frac{dU}{d\eta} = \alpha'\frac{dU}{da} + \beta'\frac{dU}{db} + \gamma'\frac{dU}{dc}$$
$$\frac{dU}{d\zeta} = \alpha''\frac{dU}{da} + \beta''\frac{dU}{db} + \gamma''\frac{dU}{dc}$$

Ferner ist:

$$\frac{dU}{da} = f_{11}\,a + f_{12}\,b + f_{13}\,c$$

$$\frac{dU}{db} = f_{21}\,a + f_{22}\,b + f_{23}\,c$$

$$\frac{dU}{dc} = f_{31}\,a + f_{32}\,b + f_{33}\,c$$

Setzt man:

$$g' = g\,\alpha + h\,\alpha' + k\,\alpha''$$

$$h' = g\,\beta + h\,\beta' + k\,\beta''$$

$$k' = g\,\gamma + h\,\gamma' + k\,\gamma'',$$

so erhält man durch Multiplication der Bedingungsgleichung mit

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1$$

$$0 = \int dm \begin{vmatrix} g' & a & f_{11}\,a + f_{12}\,b + f_{13}\,c \\ h' & b & f_{21}\,a + f_{22}\,b + f_{23}\,c \\ k' & c & f_{31}\,a + f_{32}\,b + f_{33}\,c \end{vmatrix}$$

Zerfällt man die Determinante in die Summe von drei anderen und führt die Integrationen aus, so erhält man:

$$0 = \begin{vmatrix} g' & A & f_{12} \\ h' & 0 & f_{21} \\ k' & 0 & f_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g' & 0 & f_{12} \\ h' & B & f_{22} \\ k' & 0 & f_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g' & 0 & f_{13} \\ h' & 0 & f_{23} \\ k' & C & f_{33} \end{vmatrix}$$

oder:

$$A\,(k' f_{21} - h' f_{31}) + B\,(g' f_{32} - k' f_{12}) + C\,(h' f_{13} - g' f_{23}) = 0$$

$$0 = g' f_{23}\,(B - C) + h' f_{31}\,(C - A) + k' f_{12}\,(A - B)$$

Wenn $g\,h\,k$ völlig willkürlich sind, sind es auch $g'\,h'\,k'$; daraus folgt, so lange $A\,B\,C$ von einander verschieden sind,

$$f_{23} = f_{31} = f_{12} = 0$$

das heißt, transformirt man die Gleichung des Ellipsoids

$$2\,U = \frac{d^2 W}{dx_0\,dx_0}\,\xi^2 + \ldots\ldots\ldots = 1$$

NB. Der Ausdruck: $2\,U = 1$ sei Gleichung eines Ellipsoids, ist nicht ganz genau; streng genommen, kann man nur sagen: $2\,U = 1$ stelle eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung dar.

in das Axensystem der a b c, so fallen die Producte bc ca ab heraus, oder umgekehrt. Die Richtungen der Trägheitsaxen stimmen mit den Hauptaxen jenes Ellipsoids überein. Damit ist das Problem auf ein bekanntes Problem zurückgeführt.

Diese Lösung gilt für jede zwei Körper (Erde und Stab), mag ihre Gestalt so unregelmäßig sein, wie sie will, vorausgesetzt, daß für ihre Dimensionen das oben Bemerkte gilt. Es ist aber noch übrig:

Die Hauptaxen jenes Ellipsoids wirklich zu bestimmen, da beim Erdellipsoid V und also auch U wirklich gegeben sind. Wir wollen indeß davon absehen, da wir nicht die Absicht haben, noch eine zweite vollständige Lösung des Problems zu geben, sondern nur den Weg anzudeuten, auf dem man fortzuschreiten hat, wenn man die Aufgabe verallgemeinern will.